

CONCURSUL NAȚIONAL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR /CATEDRELOR DECLARATE
VACANTE/REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR

17 iulie 2019

Probă scrisă
MATEMATICĂ

Varianta 3

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 4 ore.

ZADANIE I.

(30 bodov)

1. Majme $(a_n)_{n \geq 1}$ aritmetickú postupnosť s reálnymi číslami, s členom $a_4 = 3\sqrt{2}$.
- 5b a) Ukážte, že ak diferencia postupnosti je $\sqrt{2} - 1$, tak $a_1 = 3$.
- 5b b) Určte diferenciu aritmetickej postupnosti $(a_n)_{n \geq 1}$ vediac, že $a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 36\sqrt{2}$.
- 5b c) Dokážte, že aritmetická postupnosť $(a_n)_{n \geq 1}$ obsahuje najviac jeden racionálny člen.
2. Majme ostrouhlý trojuholník ABC , v ktorom $AB < AC$ a uhol A má veľkosť 60° . Výšky BE , s $E \in AC$ i CF , s $F \in AB$, v trojuholníku ABC sa pretínajú v bode H . Os úsečky BH pretína stranu AB v P a os úsečky CH pretína stranu AC v Q .
- 5b a) Ukážte, že $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{2}$.
- 5b b) Dokážte, že $BH \cdot HE = CH \cdot HF$.
- 5b c) Dokážte, že $BP + CQ = PQ$.

ZADANIE II.

(30 bodov)

1. Majme x_1, x_2 i x_3 korene polynómu $f = X^3 + aX^2 + X + 1$, kde a je komplexné číslo.
- 5b a) Určte komplexné číslo a vediac, že polynóm f je deliteľný s polynómom $X + a$.
- 5b b) Pre $a = 1$, dokážte, že $(x_1 + x_2 + x_3)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.
- 5b c) Určte celé čísla a , pre ktoré polynóm f má racionálny koreň.
2. Majme funkciu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \arctg(x^2 + 1)$.
- 5b a) Ukážte, že $f'(x) = \arctg(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{1 + (x^2 + 1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5b b) Určte rovnicu šikmej asymptoty k $+\infty$ ku grafu funkcie f .
- 5b c) Určte primitívu $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcie f vediac, že $F(0) = \frac{\pi}{8}$.

ZADANIE III.

(30 bodov)

Nasledovná ukážka/výňatok je z učebných osnov predmetu matematika pre IX. ročník (3 hodiny).

Competențe specifice	Conținuturi
1. Recunoașterea corespondenței dintre seturi de date și reprezentări grafice 2. Reprezentarea grafică a unor date diverse în vederea comparării variației lor 3. Aplicarea formulelor de calcul și a lecturii grafice pentru rezolvarea de ecuații, inecuații și sisteme de ecuații	Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al II-lea <ul style="list-style-type: none">• Monotonie; punct de extrem (vârful parabolei), interpretare geometrică• Poziționarea parabolei față de axa Ox, semnul funcției, inecuații de forma $ax^2 + bx + c \leq 0$ ($\geq, <, >$), $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, interpretare

<p>4. Exprimarea prin reprezentări grafice a unor condiții algebrice; exprimarea prin condiții algebrice a unor reprezentări grafice</p> <p>5. Determinarea unor relații între condiții algebrice date și graficul funcției de gradul al II-lea</p> <p>6. Utilizarea monotoniei și a punctelor de extrem în optimizarea rezultatelor unor probleme practice</p>	<p>geometrică</p> <ul style="list-style-type: none"> • Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă: rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} mx + n = y \\ ax^2 + bx + c = y \end{cases}, \text{ cu } a, b, c, m, n \in \mathbb{R},$ <p>interpretare geometrică</p>
--	--

(Programa școlară de matematică, OMECI nr. 5099 / 09.09.2009)

Za účelom hodnotenia tvorenia/rozvíjania špecifických kompetencií z danej ukážky osnov, utvorte 6 zadaní nasledovných typov: jedno zadanie s viacnásobným výberom odpovede, jedno zadanie párového typu, jedno zadanie s krátkou odpoveďou, jedno zadanie s doplňovaním, jedno zadanie typu štrukturovanej otázky a jedno zadanie typu riešenia úloh. Pri každom zadaní uveďte hodnotenú kompetenciu/kompetencie.

Poznámka. Pre každé z utvorených zadaní sa boduje spresnenie hodnotenej kompetencie/kompetencií, rešpektovanie formátu zadania, podrobné vypracovanie a správnosť očakávanej odpovede (hodnotiaci barém) a vedecká správnosť odbornej informácie.